Aula 13

Teorema: Dada uma equação diferencial ordinária, escalar de primeira ordem, linear

$$\frac{dx}{dt} = a(t)x + b(t),$$

com $a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$, a solução geral é dada por

$$x(t) = \frac{C}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t)b(t)dt,$$

em que $C \in \mathbb{R}$ é uma constante arbitrária e um factor integrante $\mu(t) = e^{-\int a(t)dt}$.
A solução do problema de Cauchy, com condição inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}$ é dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \frac{\mu(t_0)}{\mu(t)} + \frac{1}{\mu(t)} \int_{t_0}^{t} \mu(s)b(s)ds \\ &= x_0\, e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds} + \int_{t_0}^{t} e^{\int_s^t a(r)dr} b(s)ds. \end{aligned}$$

Equações Diferenciais Ordinárias Escalares de 1ª Ordem **Separáveis**

$$f(y)\frac{dy}{dt} = g(t),$$

com g, f funções reais contínuas.

Exemplo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{2t}{3y^2 + e^y}, \qquad y(0) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$y^3 + e^y = t^2 + 1$$

Teorema (Função Implícita): Seja $\Phi(t, y)$ uma função de classe C^1 e $\Phi(t_0, y_0) = 0$. Então, se

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) \neq 0,$$

existe uma vizinhança U de (t_0, y_0) e uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1, com $t_0 \in I$, $f(t_0) = y_0$ tal que

$$(t, y) \in U, \quad \Phi(t, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(t).$$

Teorema: Considere-se o problema de Cauchy para a EDO separável

$$\frac{dy}{dt} = \frac{g(t)}{f(y)}, \qquad y(t_0) = y_0,$$

com g, f funções reais contínuas em vizinhanças, respetivamente, de t_0 e y_0, com $f(y_0) \neq 0$.
Então existe solução única $y :]t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon[\to \mathbb{R}$, para algum $\varepsilon > 0$, a qual é dada implicitamente por

$$F(y) = F(y_0) + \int_{t_0}^{t} g(s)ds, \qquad \text{com } F(y) = \int f(y)dy.$$